信号处理的数学方法
aka 数字信号与图像处理
Mathematical Methods in Signal Processing

张思容
zhangsirong@buaa.edu.cn

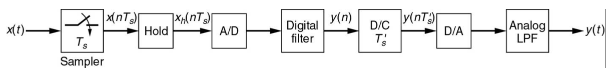
数学与系统科学学院，北京航空航天大学
School of Mathematics and Systems Science, Beihang University

April 2, 2012

Chapter 3: 数字信号处理: Discrete signal processing

阅读章节：北航教材 1.4,1.5,4.9;
参考书：数字信号与图像处理：第三章
G.Strang: Computational Science and engineering:

从连续信号到离散信号



- 连续(或模拟)系统的实现：$H(\Omega)$由固定类函数逼近； 有固定电路实现(RLC)，(专业软件设计);省电!
  问题：存在物理限制(太高频？)；设计复杂；不精确(物理误差);
- 离散(或数字)系统的实现：$H(\Omega)$由有理函数逼近，无限精确；滤波器由电脑软件实现,无物理限制； 增加AD转换,DA转换器;
  问题:耗电，速度慢；抽样信号的限制;
- AD转换器：理想脉冲抽样 $x(t) \to x(nT_s)$, T_s是抽样周期；实际可能是矩形脉冲抽样;
- DA转换器：理想插值公式可以完全重构； 实际用低通滤波器.

主要问题：存在完全重构的插值公式吗？ $x(n) \to x(t)$?
一般要限制$x(t)$的函数空间,比如多项式?

抽样信号及混叠aliasing

抽样与频率变化:
- 抽样频率:间隔时间T_s选取样本$x(nT_s)$. T_s是抽样周期(秒)，$f_s = 1/T_s$是抽样频率(单位HZ)， $w_s = 2\pi/T_s$是抽样角频率(或抽样频率).
- 信号抽样频率:设真实信号频率f, w,则抽样后数字信号频率$f' = f/f_s, w' = 2\pi w/w_s = wT_s$
- 常用归一化频率：为简化分析,设$T_s = 1, w_s = 2\pi$,则抽样信号记为$x(n)$, 数字信号频率属于$[0, 2\pi]$,

抽样信号的混叠aliasing
- 设真实信号$x(t) = \cos wt$,抽样信号$x(n) = \cos w'n$
- $w_s = 2w$, $x(n) = \cos \pi n$,是最高频率信号，称为Nyquist频率;
- $w_s = 4w$,$x(n) = \cos \pi/2n$, 是过抽样oversampling
  $w_s = 4/3w$， $x(n) = \cos 3\pi/2n$, 是欠抽样undersampling
  ***两个抽样一样$1, 0, -1, 0 \ldots$. 称为混叠aliasing(高频被低频表示);
- 特别：$\sin \pi n$与$\sin 0$混叠。Nyquist频率对正弦信号不够，
  一般要求信号的最大频率 $w \leq \pi/T_s$,即抽样后信号频率$w' \leq \pi$.

Shannon 插值公式(完全重构)

Theorem (NyquistShannon定理)

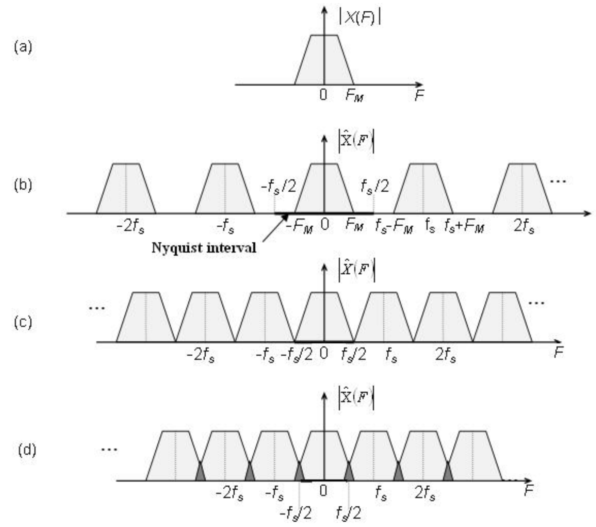
抽样信号可以完全恢复原连续信号必须满足:
(1)原信号是频率范围(频带)有限的,设最高频率w_c;
(2)抽样频率至少是最高频率的两倍。$w_s \geq 2w_c$.
称$2w_c, 2f_c$为奈奎斯特率，称采样率w_s的一半为奈奎斯特频率。
Shannon 插值公式：设抽样信号的高频频率(归一化后)为零$\hat{x}(w) = 0, |w| \geq \pi$, 则$x(t) = \sum x(n)\frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$

注记：电话: 8kHz (通话3.4kHz)； CD: 44.1kHz (声音20kHz)

Proof.

***假设$x(n)$的傅立叶变换是周期函数.
有傅立叶级数$\hat{x}(w) = \sum c_n e^{inw}$,验证:$c_n = x(-n)$.
代入傅立叶逆变换定理$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum c_n e^{inw})e^{iwt}dw$可得! □

抽样信号的混叠现象aliasing



网页：www.didkovsky.com/nyu/samplingtheorem/SamplingApplet.html

抽样定理证明:周期函数的离散谱

- 设周期函数在周期$[0, T_1]$中定义为$f_0(t)$;
- 周期函数的数学表示:$f(t) = \sum f_0(t - nT_1)$
  $f(t) = f_0(t) * \triangle_{T_1}(t)$

Proposition (Dirac comb的变换)

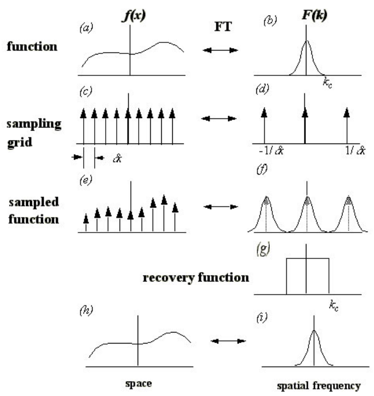
Dirac comb 是离散的周期序列。$w_1 = 2\pi/T_1$,有
傅立叶展开$\triangle_{T_1}(t) = \frac{1}{T_1}\sum e^{nw_1 t}$.
傅立叶变换: $\widehat{\triangle_{T_1}(t)} = w_1 \triangle w_1(w)$.

Corollary (周期函数的离散谱)

$\widehat{f(t)} = \widehat{f_0} \cdot \widehat{\triangle_{T_1}(t)} = \sum(w_1 F_0(nw_1) \cdot \delta(w - nw_1))$.

注记：时域周期对应频域离散。

抽样定理证明:抽样函数的周期谱



- 数学表示:$f_s(t) = f(t) \cdot \triangle_{T_s}(t)$
- 卷积公式: $\widehat{f_s(t)} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f(t)} * \widehat{\triangle_{T_1}(t)}$
- 周期谱$F_s(w) = \frac{1}{T_s}\sum F(w - nw_1)$.
  $F(w) = \widehat{f}$.
- 信号理想恢复:可以直接用频率域上方波相乘，再傅立叶逆变换。
- 一般情况:使用低通滤波器直接得到信号。
- 有其他的抽样方法(矩形抽样定理，频率抽样定理).

拉普拉斯变换LT

单边LT变换:

- 目标: 任意函数可作"傅立叶"变换; $x(t)e^{-At}$
- 变换: $X(s)=\int_0^{+\infty}x(t)e^{-st}dt, s=A+iw$.
- 收敛条件:$x(t)$分段连续, $|x(t)|\leq Ae^{Mt}$.
- 例子: $x\equiv 1, X(s)=1/s$, 但傅立叶变换不存在。
- 逆变换: $$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{st}F(s)\,ds,$$

双边LT变换:

- 推广双边Laplace变换:$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$
  s称为复频率。实变函数→复变函数!
- 如果傅立叶变换存在, $\widehat{x(t)}=X(s)|_{s=wi}$.
- 收敛域ROC的不同: $e^{At}\mu(t)$与$-e^{At}\mu(-t)$的LT变换为$\frac{1}{s-a}$, 收敛域$Re(s)>a, Re(s)<a$.

Z变换

抽样信号的LT变换:

- Dirac Comb:$\triangle_{T_s}(t)=\sum\delta(t-nT_s)$
- LT变换: $L(\triangle_{T_s})=\frac{1}{1-e^{-sT_s}}$
- 抽样信号: $f_s(t)=f(t)\cdot\triangle_{T_s}(t)$
  $L(f_s)=\sum_0^{+\infty}f(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

Definition (Z变换)

设抽样信号$x_s(t)$,则其$LTX_s(s)=\sum x(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.
令$z=e^{sT_s}$或$s=\ln z/T_s$, 有$X(z)=\sum x(nT_s)z^{-n}$.
一般的归一化表示$T_s=1$,有序列信号$x(n)$,Z变换$X(z)=\sum x(n)z^{-n}$.

Z变换的物理意义?

离散时间傅立叶变换

物理频率的表示:
LT变换: s是复频域,真实频率$s=iw$: 虚轴;
z变换: $z=e^s$,真实频率变到e^{iw}: 单位圆。
设抽样信号$x_s(t)$,则其LT$X_s(s)=\sum x(nT_s)e^{-s(nT_s)}$.

- 定义: $X(e^{i\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-i\omega n}$
- 谱为2π 周期函数. 特别 $X(e^{i\omega})=X(z)|_{z=e^{i\omega}}$
- 收敛条件: $x(n)$绝对可和。其他? ROC包含单位圆。
- 周期卷积:$x_1(n)x_2(n)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{i\theta})X_2(e^{i(\omega-\theta)})d\theta$.

注: 与傅立叶变换不一样!!!

复分析回顾: Best functions

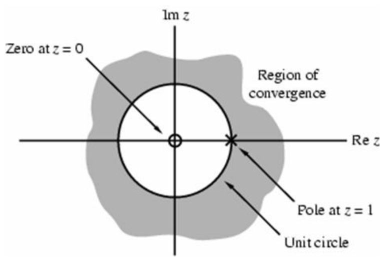
最佳函数: 解析函数

- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$
  $f(x)=1/(1+25x^2)$无穷光滑不解析!
- 收敛域: 圆盘 $1/r=limsup\sqrt[n]{|c_n|}$.
  收敛域内任意函数值可以多项式指数逼近(泰勒公式仅仅是局部逼近);
  → 1970s 谱方法 (1950s 有限差分方法, 1960s 有限元方法)

亚纯函数或Laurent级数

- $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_nz^n$
  一般仅考虑有限负项, 则$f(z)(z-p_1)(z-p_2)\ldots$是解析的, 称p_i为极点;
- 收敛域: 可能是圆盘外$|z|>r$, 圆环; $R_2>|z|>R_1$, 收敛域内解析!
  一般以极点为边界;

Z变换的收敛域



- Laurent 罗朗级数的收敛：在收敛域内每一点解析!
- $\sum x(n)z^{-n}$收敛的充要条件:$\sum |x(n)z^{-n}| < +\infty$
  判别法则:比值或根值判别。
- 例子：双边有限序列；
  左边序列；右边序列；
  双边无限序列可能不存在Z变换!
- 复变函数的零点z_i和极点p_j: $F(z_i) = 0, 1/F(p_j) = 0$
- 结论：ROC以极点为边界!

常见序列Z变换

- 单位冲激序列:$\delta(n), X(z) = 1$
  注意：单位冲激序列不是单位冲激函数的离散抽样!
- 单位阶跃序列$u(n)$, $X(z) = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$
  矩形序列:$G_N(n), X(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$
- 指数系列$a^n u(n), X(z) = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$
  余弦序列$\cos(nw_0)u(n), X(z) = \frac{z(z-\cos w_0)}{z^2-2z\cos w_0+1}$.

***再抽样序列：$x_b(n) = x(nb)$

- Downsampling降抽样：$x_M(n) = x(Mn), M \in \mathcal{N}$
  Z变换$X_M(z) = X(z^{1/M})$ ROC变化!
- UpSampling 升抽样：$x_{1/M}(n) = x(n/M), M \in \mathcal{N}$(要补零);
  Z变换$X_{1/}M(z) = X(z^M)$ ROC变化!

Z变换的性质

Property	Sequence	z-Transform	ROC
	$g[n]$ $h[n]$	$G(z)$ $H(z)$	$\mathcal{R}_g$ $\mathcal{R}_h$
Conjugation	$g^*[n]$	$G^*(z^*)$	$\mathcal{R}_g$
Time-reversal	$g[-n]$	$G(1/z)$	$1/\mathcal{R}_g$
Linearity	$\alpha g[n] + \beta h[n]$	$\alpha G(z) + \beta H(z)$	Includes $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Time-shifting	$g[n-n_o]$	$z^{-n_o}G(z)$	$\mathcal{R}_g$, except possibly the point $z = 0$ or ∞
Multiplication by an exponential sequence	$\alpha^n g[n]$	$G(z/\alpha)$	$\lvert\alpha\rvert\mathcal{R}_g$
Differentiation of $G(z)$	$ng[n]$	$-z\frac{dG(z)}{dz}$	$\mathcal{R}_g$, except possibly the point $z = 0$ or ∞
Convolution	$g[n]\circledast h[n]$	$G(z)H(z)$	Includes $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{R}_h$
Modulation	$g[n]h[n]$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C G(v)H(z/v)v^{-1}\,dv$	Includes $\mathcal{R}_g\mathcal{R}_h$
Parseval's relation	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C G(v)H^*(1/v^*)v^{-1}\,dv$		

Note: If $\mathcal{R}_g$ denotes the region $R_{g^-} < |z| < R_{g^+}$ and $\mathcal{R}_h$ denotes the region $R_{h^-} < |z| < R_{h^+}$, then $1/\mathcal{R}_g$ denotes the region $1/R_{g^+} < |z| < 1/R_{g^-}$ and $\mathcal{R}_g\mathcal{R}_h$ denotes the region $R_{g^-}R_{h^-} < |z| < R_{g^+}R_{h^+}$.

特别:z域卷积(复卷积)是周期卷积(沿圆周积分)!

复分析回顾：留数与积分公式

积分公式

- 柯西定理：解析函数$\oint_C f(z)dz = 0$
- 柯西积分公式：$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$
  特别$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

留数

- Laurent级数 $f(z) = \sum_{n=-infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$
  $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$称为在极点$z_0$处的留数$Res(z_0)$;
  一般$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$.
- 留数定理：$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(Res(z_0) + Res(z_1) + \ldots)$.
- 有理函数$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$在简单极点(一阶)z_0处留数为
  $c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{N(z_0)}{D'(z_0)}$

逆Z变换

Theorem (逆Z变换公式)

$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$, C为收敛域内一封闭曲线。

Corollary

离散时间傅立叶变换(*DTFT*)的逆变换:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega})e^{i\omega n}d\omega$$

计算方法:

- 有理分式展开 $X(z)/z = \frac{N(z)}{D(z)}$
- 幂级数展开, $X(z) = \sum x(n)z^{-n}$ 长除法;
- 直接计算: 利用简单函数的Z变换的运算。

离散LTI系统

离散线性时不变系统(LTI)

Theorem

离散线性时不变系统(*LTI*)是卷积系统: $y(n) = x(n) * h(n)$ $h(n)$是$\delta(n)$的单位冲激响应。

Outline: $x(n) = \sum x(m)\delta(n-m)$,$\delta(n-m) \to h(n-m)$.

- 离散系统基本运算:单位延时,加法器, 放大器。
- 复杂系统: 系统的并联(响应函数加法),串联(响应函数卷积复合);
- LTI因果系统当且仅当$h(n)$是因果序列
- LTI稳定当且仅当$\sum|h(n)| < +\infty$

一般模型(ARMA): 可以看成一个常系数差分方程
$\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j)$.

离散LTI系统的传递函数

Definition (传递函数)

一个离散*LTI*的输入输出信号*Z*变换的比值$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$称为系统的传递函数或系统函数。
特别: 有理传递函数 $\sum b_i y(n-i) = \sum a_j x(n-j)$, 则$H(z) = \frac{\sum a_j z^{-j}}{\sum b_i z^{-i}}$

- $H(z)$的逆z变换是$h(n)$.
- LTI因果系统 等价: 传递函数的ROC为某个圆外部。有理系统:分子不大于分母的阶;
- LTI稳定 等价:传递函数的ROC包含单位圆。因果有理系统:极点在单位圆内。

系统频率响应
$H(z) = |H(z)|e^{iargH(z)}$, $arg(H(z)) = \arctan(H_i m(z)/H_r e(z))$
特别$Y(e^{iw}) = H(e^{iw})e^{iw}$,是系统对正弦信号的响应。

系统的分类

有理传递函数频率响应: $H(e^{i\omega}) = \frac{p_0}{d_0}e^{i\omega(N-M)}\frac{\prod_{k=1}^M(e^{i\omega}-\xi_k)}{\prod_{k=1}^N(e^{i\omega}-\lambda_k)}$,
幅度响应$|H(e^{i\omega})| = \left|\frac{p_0}{d_0}\right|\frac{\prod_{k=1}^M|e^{i\omega}-\xi_k|}{\prod_{k=1}^N|e^{i\omega}-\lambda_k|}$
相位响应$\theta(\omega) = argH(e^{i\omega}) =$
$arg\frac{p_0}{d_0} + \omega(N-M) + \sum_{k=1}^M arg(e^{i\omega}-\xi_k) - \sum_{k=1}^N arg(e^{i\omega}-\lambda_k)$

- 按幅度响应分类: 理想滤波函数: 低通, 高通, 带通, 带阻;
  有界实传递函数BR:$|H(e^{i\omega})| \le 1$,特别无损系统如果能量不变。
  全通传递函数:$|H(e^{i\omega}|) = 1$
- 按相位响应分类:
  零相位传递函数: $\theta(\omega) = 0$ 不存在零相位因果滤波器。
  线性相位传递函数: $H(e^{i\omega}) = e^{-i\omega D}$, 群延迟$\tau(\omega) = D$
  ***最小最大相位传递函数:所有零点$|\xi_k| < 1$称为最小相位; 反之最大相位; 不一定则是混合相位;
- 对有理传递函数$H(z) = N(z)/D(z)$,按响应项数分类;
  FIR:有限冲激响应 $D(z) = 1$, $h(n)$有限项; 又称为全零点滤波器;
  IIR:无穷冲激响应 $D(z) \neq 1$, $h(n)$无限项; 又称为递归滤波器;

简单滤波器:MA,MD

移动平均滤波器$y(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)$

- DC直流信号$x(n) = 1 \to y(n) = 1$, AC交流信号$x(n) = (-1)^n \to y(n) = 0$.
- 一般频率信号 $e^{inw} \to (0.5 + 0.5e^{-inw})e^{inw}$.
- $H(e^{iw}) = 0.5 + 0.5e^{iw} = e^{-iw/2}\cos(w/2)$是低通滤波器. 特别是线性相位滤波器。

类似：移动差分滤波器$y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-1), H(e^{iw}) = e^{-iw/2} i \sin(w/2)$.

Proposition (对称得到线性相位)

如果$h(k) = h(N-k)$,则$H(w) = e^{-iwN/2}|H(w)|$,特别$|H(w)|$是偶函数。

语音信号预处理：$y(n) = x(n) - ax(n-1), 0 < a \le 1$.
$|H(e^{iw})| = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos w}$ 是关于$w \in [0, \pi]$的增函数.(放大高频).

数字滤波器设计过程

目标：构造传输函数$G(z)$逼近指定的频率响应。

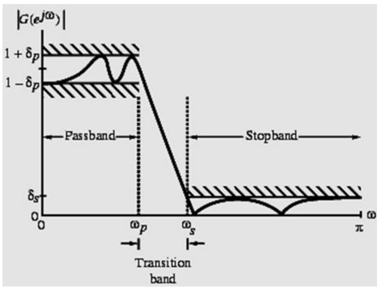
- 设计指标：参数$\omega_p, \omega_s, \delta_p, \delta_s$
- 确定滤波器类型：FIR, IIR
- 确定滤波器的阶数：N
- 给出滤波器的系数：$P(z), P(z)/Q(z)$
- 利用计算机迭代优化系数。

数字滤波器的设计方法

- FIR: 窗口函数，最小平方逼近，极大极小逼近；fir1,firls，,firpm;
- IIR: 利用成熟的模拟滤波器设计。
  1. 双线性变换数字频率响应指标转化到模拟频率域；
  2. 使用常用模拟滤波器(butterworth等)；
  3. 双线性变换回到数字频率域；

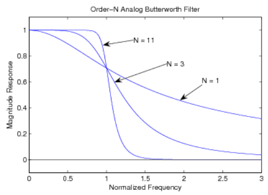
注记:
经典滤波器可以转换为低通滤波器；构造可逆复变换$s = F(\hat{s})$得到频率变换。 高通 $\Omega = -\frac{\Omega_p \hat{\Omega}_p}{\hat{\Omega}}$, $\hat{\omega} = -1/\omega$;
带通 $\Omega = -\Omega_p \frac{\hat{\Omega}_0{}^2 - \hat{\Omega}^2}{\hat{\Omega} B_\omega}$, $\hat{\omega} = \omega - 1/\omega$; 带阻 $\Omega = \Omega_s \frac{\hat{\Omega} B_\omega}{\hat{\Omega}_0{}^2 - \hat{\Omega}^2}$, $\hat{\omega} = \frac{1}{\omega - 1/\omega}$
一般的数字滤波器可以直接计算逼近；

低通数字滤波器设计指标



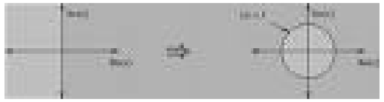
- 通带截止频率ω_p,阻带截止频率ω_s
- 通带上$|\omega| \le \omega_p, 1 - \delta_p \le |G(e^{i\omega})| \le 1 + \delta_p$
  阻带上 $\omega_s \le |\omega| \le \pi, |G(e^{i\omega})| \le \delta_s$
- 峰波纹值δ_q, δ_s用损益函数表示$\alpha_p = -20\lg(1 - \delta_p)dB$, $\alpha_s = -20\lg(\delta_s)dB$,称为通带峰值波纹，最小阻带衰减。
- 单位化：设幅度最大值为1；通带波纹表示$1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$; 阻带波纹表示$1/A$
- ***其他参数：选择性参数：$k = \omega_p/\omega_s < 1$
  分辨参数：$k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} << 1$.

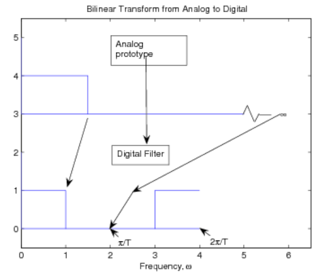
模拟滤波器设计：Butterworth滤波器



- 通用公式 $|H(i\Omega)|^2 = \frac{1}{1+C^2(\Omega^2)^N}$,
- 常用归一化：$|H(i\Omega/\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_p)^{2N}}$,
  其中Ω_p是3dB截止频率；$\alpha_p = 3dB$,
  $N = \frac{1}{2}\frac{10^{\alpha_s}-1}{10^{\alpha_p}-1}/\lg(\Omega/\Omega_p)$
- 特征：$\Omega = 0$最大；极大平坦（$N-1$阶导数为零)；通带与阻带都单调；
- 滤波器表示：$p = i\Omega/\Omega_p$,
  $H(p) = \frac{C}{D_N(p)} = \frac{1}{\prod(p-p_i)}$,
  最后复频率域表示 $H(s) = H(s/\Omega_p)$;
  可以计算或用MATLAB得到。
  $buttap(N), butterord(), butter(n, w)$
- 例子：$f_p = 5kHz, \alpha_p = 3dB, f_s = 10kHz, \alpha_s = 30dB$.
  $N = 4.982 \sim 5$, 极点$p_k = e^{(2k+N-1)/2N\pi}$;
  带回

IIR滤波器设计：双线性变换



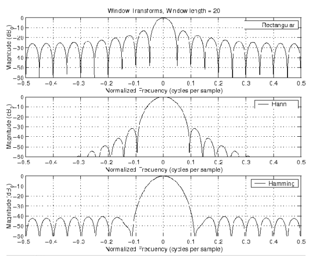


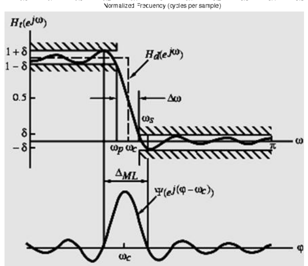
- 从模拟频率域到数字频率域的变换 $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, 对应的数字传递函数 $G(z) = H(s)|_{s=**}$;
  逆映射：$s = a + bi$, $z = \frac{1+(a+bi)T/2}{1-(a+bi)T/2}$
- 频率映射：虚轴映射到单位圆；代入$z = e^{i\omega}$, 频率关系$\Omega = \frac{2}{T}\tan(\frac{\omega}{2})$
- 双线性变换一般可以简化：令$T = 2$, $z = \frac{1+s}{1-s}$.
- 例子：$f_p = 100Hz, f_s = 300Hz, \alpha_p = 3dB, \alpha_s = 20dB$,抽样频率$F_s = 1kz$;
  $w_p = 0.2\pi, w_s = 0.6\pi$, 双线性变换$\Omega_p = \tan(w_p/2) = 0.3249, \Omega_s = 1.376$;
  $N = 1.59 \sim 2$,
  $H(p) = 1/(p^2 + \sqrt(2)p + 1), p = s/\Omega_p$,
  带回$s = (z-1)/(z+1)$.

理想低通数字滤波器与矩形窗

- 理想低通数字滤波器的频率响应$H(e^{iw})$是周期为2π的偶方波；
  $h_d(n) = \sin(w_p n)/(\pi n)$ 非因果系统
- 矩形窗实现：截断M点加上平移$M/2$, 有$h(n) = h_d(n - M/2)$;
  **通常:系数要求归一化；
- 特征：通带与阻带存在波纹!M变大，并不减小波纹!
- 例子：$M = 10, 20, 40$
- 说明：波纹是Gibbs现象的表现。截断等价与矩形窗乘法，对应频率域是$sinc$函数的卷积，$sinc$函数的边瓣产生波纹.
- 应用：选择不同窗函数得到较好频率响应，常用Hammming。
  注意：窗函数法不能精确确定$w_p, w_s, \alpha_p, \alpha_s$，通常用计算机选取不同$M$调试。
  但是可以对任何形状的$H(e^{iw})$直接有限逼近！

常见窗函数





- 矩形窗函数：$\omega[n] = 1$
- Bartlett(三角形)：$\omega[n] = 1 - |n|/(M+1)$;
- Hanning:
  $\omega[n] = 0.5(1 + \cos(2\pi n/(2M+1)))$;
  Hamming:
  $\omega[n] = 0.54 + 0.46\cos(2\pi n/(2M+1))$
- Blackman:
  $\omega[n] = 0.42 + 0.5\cos(2\pi n/(2M+1)) + 0.08\cos(4\pi n/(2M+1))$;
- Ω的形状参数：主瓣宽度B(3dB带宽)，相对旁瓣最大值A.边瓣衰减速度D
  例如：矩形
  窗$B = 0.89 * 2\pi/N, A = -13dB, D = -6$,
  $2\pi/N$是常见宽度单位。

FIR:最佳滤波器

最小二乘滤波器

- MSL 极小化错误$R = \int |ideal(w) - H(w)|^2 dw|$
- 主要障碍:Gibbs现象:
- MATLAB: *firls*()
- 一般窗函数不是最小二乘，但类似;

等波纹滤波器 equi-ripple

- 极小极大逼近: 最大错误(通带和阻带)都一样。$max_w |Ideal(w) - H(w)|$
  一般用对称滤波器
- 交错定理:d阶多项式逼近，至多出现$d+2$次交错。
- 阶的选定: 估计公式
- 算法: Parks-McClellan算法(特别Remez迭代算法)
- MATLAB *firpmord*(), *firpm*()

逼近的插值方法：频率抽样法 $H_d(k) = Ideal(w_k)$,得到$h_d(n)$;

有限信号的效应

加窗的效应

- 物理分辨率
- 频率的泄漏
- 离散傅立叶变换DFT

本章深入学习问题

附上相关问题以便课程期末报告选择:

- 其他抽样定理(频域,矩形抽样);
- 拉普拉斯变换及其应用;
- 数字滤波器设计的其他方法;(MATLAB中)
- 数字滤波器设计的窗函数选取与比较;
- 交错定理的证明:d阶多项式逼近，至多出现$d+2$次交错。
- *firpm*中Parks-McClellan算法;
- *firls*中算法;
- 简单的数字滤波器应用;